LAHENDUSED 8. KLASS

1. **Vastus: Kolmandal kaardil oli arv 30.**

<u>Lahendus:</u>

<u>Lahendus 1.</u>
Olgu kolmandal kaardil oleva kahekohalise arvu kümneliste number a ja üheliste number b. Kõik võimalikud kuuekohalised arvud on:
$\overline{1523ab}$, $\overline{2315ab}$, $\overline{15ab23}$, $\overline{23ab15}$ ja $\overline{ab1523}$, $\overline{ab2315}$.

Saame kirjutada
$1523 \cdot 100 + \overline{ab} + 2315 \cdot 100 + \overline{ab} + 15 \cdot 10000 + \overline{ab} \cdot 100 + 23 + 23 \cdot 10000 + \overline{ab} \cdot 100 +$
$+ 15 + \overline{ab} \cdot 10000 + 1523 + \overline{ab} \cdot 10000 + 2315 =$
$= 767676 + 2 \cdot \overline{ab} + 2 \cdot \overline{ab} \cdot 100 + 2 \cdot \overline{ab} \cdot 10000 = 767676 + \overline{ab} \cdot 20202.$

Seega $767676 + \overline{ab} \cdot 20202 = 1373736$, millest $\overline{ab} \cdot 20202 = 1373736 – 767676$ ehk $\overline{ab} \cdot 20202 = 606060$, millest $\overline{ab} = 606060 : 20202 = 30$.
Kolmandal kaardil oli arv 30.

<u>Lahendus 2.</u>
Olgu kolmandal kaardil oleva kahekohalise arvu kümneliste number a ja üheliste number b. Kõik võimalikud kuuekohalised arvud on:
$\overline{1523ab}$, $\overline{2315ab}$, $\overline{15ab23}$, $\overline{23ab15}$ ja $\overline{ab1523}$, $\overline{ab2315}$.

Nende kuue arvu summa üheliste numbriks on summa $b + b + 3 + 5 + 3 + 5$ üheliste number. Teiselt poolt teame, et selle summa üheliste number on 6.
Seega summa $b + b + 3 + 5 + 3 + 5 = 16 + 2b$ üheliste number peab olema 6. On kaks võimalust, $b = 0$ või $b = 5$.

Kui arvu üheliste number oleks 5, siis ühelt poolt kuue arvu summa kümneliste number on $2 + a + a + 2 + 1 + 2 + 1 = 8 + 2a$ ja teiselt poolt teame, et see peaks olema 3. Kuna a on number, siis see ei ole võimalik.

Kui üheliste number on 0, siis ühelt poolt kuue arvu summa kümneliste number on $1 + a + a + 2 + 1 + 2 + 1$ ja teiselt poolt teame, et see peab olema 3.
Seega $a = 3$.

Oleme saanud, et kahekohaline arv oleks 30.
Kontrollides saame, et tõesti summa 152330 + 231530 + 153023 + 233915 + 301523 + 302315 on 1373736.

Hindamine:

Lahendus 1:

Kirja pandud kõik võimalikud kuuekohalised arvud	2p
Saadud võrdus $767676 + X \cdot 20202 = 1373736$, kus X on otsitav kahekohaline arv	3p
Leitud kahekohaline arv	2p
	7p

Lahendus 2:

Kirja pandud kõik võimalikud kuuekohalised arvud	2p
Leitud kahekohalise arvu üheliste numbri kõik võimalused	1p
Leitud arvu üheliste number 0	1p
Näidatud, et üheliste number ei saa olla 5	1p
Leitud kahekohalise arvu kümneliste number	1p
Näidatud, et sel juhul tõesti summa on võrdne ülesandes antuga	1p
	7p

Märkus: Kui on antud ainult vaid õige vastus, anda 2p.

2. **Vastus:**

Aste – 1 km – Pasta –1 km – Kaste – 4 km – Testo,
Aste – 1 km – Pasta –3 km – Kaste – 2 km – Testo,
Aste – 4 km – Kaste – 1 km – Pasta – 1 km – Testo,
Aste – 2 km – Kaste – 3 km – Pasta – 1 km – Testo.

Lahendus:

Sõltumata kohvikute järjestusest sirgel on läbitud km arv vähim juhul, kui ta alustab ühest äärmistest ja lõpetab teises ääres oleva kohviku juures. Seejuures kummastki alustades tuleb läbitud vahemaa sama. Antud on vahemaade pikkused kolmest kohvikust. Kuna Astest alustades on see lühem, kui kahest ülejäänust, siis Aste peab olema üheks äärmistest kohvikutest ja vaid Testo saab olla teiseks äärmiseks kohvikuks ning nende vaheline kaugus on 6 km.

Vaatame kuidas kohvikud Pasta ja Kaste saavad seal vahel paikneda.
Kuna Pastast alustades on võimalik kõiki kohvikuid läbida nii, et vähim võimalik vahemaa pikeneb 1 km võrra, siis peab Pasta paiknema 1 km kaugusel ühest äärmisest kohvikust.
Saame kaks võimalust:
Aste – 1 km – Pasta – 5 km – Testo,
Aste – 5 km – Pasta – 1 km – Testo.

Kuna Kastest alustades on võimalik kõiki kohvikuid läbida nii, et vähim võimalik vahemaa pikeneb 2 km võrra, siis peab Kaste paiknema 2 km kaugusel ühest äärmisest kohvikust.
Arvestades kahte eelnevat võimalust saame nüüd neli võimalust:
Aste – 1 km – Pasta –1 km – Kaste – 4 km – Testo,
Aste – 1 km – Pasta –3 km – Kaste – 2 km – Testo,
Aste – 4 km – Kaste – 1 km – Pasta – 1 km – Testo,
Aste – 2 km – Kaste – 3 km – Pasta – 1 km – Testo.

Hindamine:

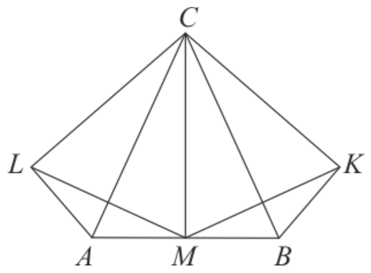
Näidatud, et äärmiste kohvikute vahelise tee pikkus on 6 km	1p
Näidatud, et Aste ja Testo on kaks äärmist kohvikut	2p
Saadud, et Pasta peab olema 1 km kaugusel ühest äärmisest kohvikust	1p
Saadud, et Kaste peab olema 2 km kaugusel ühest äärmisest kohvikust	1p
Leitud kõik neli võimalust kohvikute paiknemiseks	2p
	7p

Märkus: Antud vaid neli õiget võimalust: 2p

Antud vaid kaks õiget võimalust: 1p

3. **Vastus: Viisnurga nurkade suurused on 100°, 90°, 90°, 130°, 130°.**

<u>Lahendus:</u>



Kuna kolmnurk *ABC* on võrdhaarne ja punkt *M* on aluse keskpunkt, siis *CM* poolitab nurga *ACB*. Lisaks sellele on *CM* ka kolmnurga *ACB* kõrguseks.

Konstruktsioonist tulenevalt koosneb viisnurk *ABKCL* kahest võrdsest nelinurgast *AMCL* ja *MBKC*.
Vaatleme kolmnurki *ACL* ja *ACM*. Kuna punkt *L* on saadud punkti *M* peegeldamisel *AC*-st, siis *LM* on risti *AC*-ga ning *LA* ja *AM* on võrdsed ning ka *LC* ja *MC* on võrdsed.

Seega saame, et kolmnurgad *ACL* ja *ACM* on võrdsed. Seega *AC* poolitab nurga *LCM* ja poolitab ka nurga *LAM*. Kuna *CM* on kõrgus, siis nurk *AMC* on täisnurk ja kuna kolmnurgad on võrdsed, siis ka nurk *ALC* on täisnurk.

Kolmnurgast *ABC* saame, et $\angle ACM = 50° : 2 = 25°$.
Kolmnurkade võrdsusest saame, et $\angle LCA$ on ka 25°, ning järelikult $\angle LCK = 4 \cdot 25° = 100°$.
Kolmnurgast *AMC* saame, et nurk *CAM* on $(180° - 50°) : 2 = 65°$, ning järelikult $\angle LAM = 2 \cdot 65° = 130°$.

<u>Hindamine:</u>

Märgitud, et *ALC* = *AMC* ja *BMC* = *BKC*	1p
Põhjendatud nurga $\angle ALC = \angle BKC$ suuruse leidmine	1p
Leitud nurga $\angle ALC = \angle BKC$ suurus	1p
Põhjendatud nurga $\angle LAB = \angle ABK$ suuruse leidmine	1p
Leitud nurga $\angle LAB = \angle ABK =$ suurus	1p
Põhjendatud nurga $\angle LCK$ suuruse leidmine	1p
Leitud nurga $\angle LCK$ suurus	<u>1p</u>
	7p

<u>*Märkus:*</u> Antud vaid õige vastus: 2p

4. **Vastus: Müntide vähim väärtus oli 125 olli.**

Lahendus:

Lahendus. Olgu sellises tornis üheolliste müntide arv a ja viieolliste arv b.
Saame kirjutada võrduse $a + 5b = 1{,}6a + 1{,}75b$.
Millest $0{,}6a = 3{,}25b$ ehk $60a = 325b$, $12a = 65b$.

Kuna a ja b on naturaalarvud ja arvudel 12 ja 65 arvust 1 erinevad ühised tegurid puuduvad, siis a peab olema arvu 65 kordne ja b peab olema arvu 12 kordne. Kuna küsitakse vähimat võimalikku koguväärtust, siis peab ka münte olema võimalikult vähe. Seega tornis oli 65 üheollist ja 12 viieollist münti. Müntide koguväärtus selles tornis oli ollides $65 + 5 \cdot 12 = 125$.

Hindamine:

Kirja pandud võrdus, mis võimaldab leida müntide arvu	2p
Saadud võrdus, millest saab teha järelduse, et üheolliste arv peab olema arvu 65 kordne ja viieolliste arv arvu 12 kordne	2p
Tehtud eelmainitud võrdusest õige järeldus	1p
Märgitud, et vähima väärtuse saamiseks peabki üheolliste arv peab olema 65 ja viieolliste arv 12	1p
Leitud müntide koguväärtus	1p
	7p

5. **Vastus: On vaid üks selline arv ja selleks on 11311.**

Lahendus:

Kuna arvu viimaseks numbriks on jääk, mis tekib arvuga 6 jagamisel, siis see saab olla kas 0, 1, 2, 3, 4 või 5.
Kuna arv on viiekohaline ja esimeseks numbriks on jääk, mis tekib arvuga 2 jagamisel, siis see peab olema 1.
Et arvuga 2 jagamisel tekib jääk 1, siis arv peab olema paaritu. Seega arvu viimane number saab olla 1, 3 või 5.
Kui arvu viimane number on 1 või 3, siis see annab arvuga 5 jagamisel ka vastavalt jäägid 1 ja 3. Sel juhul on arvu eelviimaseks numbriks ka vastavalt 1 ja 3.
Kui arvu viimane number on 5, siis annab see arvu 5 jagamisel jäägi 0.
Seega arvu esimene number on alati 1 ning selle kaks viimast numbrit on kas 11, 33 või 05.

Kui arvu kaks viimast numbrit on 11, siis selle viiekohalise arvu saab kirjutada $x \cdot 100 + 11$, kus x on arv, mis moodustub arvu kõigist, v.a arvutud kahest viimasest numbrist. Kuna $x \cdot 100$ jagub arvuga 4, siis arvu $x \cdot 100 + 11$ jagamisel arvuga 4 saame sama jäägi, mis arvu 11 jagamisel arvuga 4. Arvu 11 jagamisel arvuga 4 tekib jääk 3. Seega arvu kolm viimast numbrit on 311.
Oleme saanud, et esimene number on 1 ja kolm viimast on 311.
Arvu teine number on sama, mis viiekohalise arvu jagamisel arvuga 3 tekkiv jääk. Kuna 1 + 3 + 1 + 1 = 6, siis tekkiv jääk on võrdne arvu teise numbriga. Seega arv võiks olla 10311, 11311, 12311.
Kuna otsitav arv annab kuuega jagamisel jäägi 1, siis peab see ka arvuga 3 jagamisel andma jäägi 1. Järelikult neist kolmest vaid 11311 vastab tingimustele.

Kui arvu kaks viimast numbrit on 33, siis selle arvu saab kirjutada kujul $y \cdot 100 + 33$, kus y on arv, mis moodustub arvu kõigist, v.a arvutud kahest viimasest numbrist. Kuna $y \cdot 100$ jagub arvuga 4, siis arvu $y \cdot 100 + 33$ jagamisel arvuga 4 saame sama jäägi mis arvu 33 jagamisel. Arvu 33 jagamisel arvuga 4 tekib jääk 1. Seega arvu kolm viimast numbrit on 133.
Oleme saanud, et esimene number on 1 ja kolm viimast on 133.
Arvu teine number on sama, mis viiekohalise arvu jagamisel arvuga 3 tekkiv jääk. Kuna kuuega jagamisel tekib jääk 3, siis see arv peab jaguma arvuga 3, ehk teiseks numbriks peaks olema 0. Saaksime arvu 10133. See arv aga annab arvuga 3 jagamisel jäägi 2. Seega sellist viiekohalist arvu, mille viimane number on 3, ei leidu.

Seda, et ei leidu viiekohalist arvu viimase numbriga 3, saab näidata ka järgnevalt: Viiekohalise arvu teadaolevate numbrite summa on 1 + 1 + 3 + 3 = 8 ning tekkiv jääk peab olema võrdne arvu teise numbriga. Arvu teine number ei saa olla 0, sest arvu numbrite summa oleks 8 ja see ei jagu arvuga 3. Kui arvu teine number oleks 1, siis saame, et arvu numbrite summa oleks 9, mis aga tähendab, et arv jagub arvuga 3. Kui arvu teine number oleks 2, siis saame, et arvu numbrite summa oleks 10, mis aga ütleb, et viiekohalise arvu jagamisel arvuga 3 tekib jääk 1. Seega ei saa leiduda selliseid viiekohalisi arve, mille viimaseks numbriks on 3.

Kui viiekohalise arvu kaks viimast numbrit on 05, siis saame selle kirjutada kujul $z \cdot 100 + 5$, kus z on arv, mis moodustub arvu kõigist, v.a arvutud kahest viimasest numbrist. Kuna $z \cdot 100$ jagub arvuga 4, siis arvu $z \cdot 100 + 5$ jagamisel arvuga 4 saame sama jäägi, mis arvu 5 jagamisel. Arvu 5 jagamisel arvuga 4 tekib jääk 1. Seega arvu kolm viimast numbrit on 105.
Oleme saanud, et esimene number on 1 ja kolm viimast on 105.
Arvu teine number on sama, mis viiekohalise arvu jagamisel arvuga 3 tekkiv jääk. Kuna kuuega jagamisel tekib jääk 5, siis see arv peab arvuga 3 jagamisel andma jäägi 2, ehk teiseks numbriks peaks olema 2. Saaksime arvu 12105. See arv aga annab arvuga 3 jagamisel jäägi 0. Seega sellist viiekohalist arvu, mille viimane number on 5, ei leidu.

> Seda, et ei leidu viiekohalist arvu viimase numbriga 5, saab näidata ka järgnevalt: Viiekohalise arvu teadaolevate numbrite summa on 1 + 1 + 5 = 7 ning tekkiv jääk peab olema võrdne arvu teise numbriga. Arvu teine number ei saa olla 0, sest arvu numbrite summa oleks 7 ja see ei jagu arvuga 3. Kui arvu teine number oleks 1, siis saame, et arvu numbrite summa oleks 8, mis aga annab arvuga 3 jagamisel jäägi 2. Kui arvu teine number oleks 2, siis saame, et arvu numbrite summa oleks 9, mis aga jagub arvuga 3. Seega ei saa leiduda selliseid viiekohalisi arve, mille viimaseks numbriks on 5.

Hindamine:

Tähelepanek, et arvu esimene number peab olema 1	1p
Näidatud, et arvu viimane number saab olla 1, 3 või 5	1p
Näidatud, et vastavalt arvu viimasest numbrist on eelviimane number on kas 1, 3 või 0	1p
Leitud arvu keskmine number kõigil kolmel juhul	2p
Kõikidel juhtudel näidatud viiekohalise arvu teise numbri leidmine	2p
	7p

Märkus: Antud vastuseks vaid õige arv: 2p